

Déduction naturelle

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 4.4 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- lire un séquent
- décrire les règles d'introduction et d'élimination
- justifier les principaux raisonnements de la logique classique
- construire un arbre de preuve démontrant une formule simple

A Utilisation des règles d'inférence

Prouver les séquents suivants :

A1. $\vdash p \rightarrow p$

Solution :

$$\frac{\overline{p \vdash p} \text{ ax}}{\vdash p \rightarrow p} \rightarrow_i$$

A2. $p, \neg p \vdash \perp$

Solution :

$$\frac{\overline{p, \neg p \vdash p} \text{ ax} \quad \overline{p, \neg p \vdash \neg p} \text{ ax}}{p, \neg p \vdash \perp} \neg_e$$

A3. $p, q \vdash p \wedge q$

Solution :

$$\frac{\overline{p, q \vdash p} \text{ ax} \quad \overline{p, q \vdash q} \text{ ax}}{p, q \vdash p \wedge q} \wedge_i$$

A4. $p \wedge q \vdash q \wedge p$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{p \wedge q \vdash p \wedge q}{p \wedge q \vdash q} \text{ax}}{\wedge_e} \quad \frac{\frac{\frac{p \wedge q \vdash p \wedge q}{p \wedge q \vdash p} \text{ax}}{\wedge_e}}{\wedge_i}}{p \wedge q \vdash q \wedge p}$$

A5. $p \vee q \vdash q \vee p$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{p \vee q \vdash p \vee q}{p \vee q \vdash p \vee q} \text{ax} \quad \frac{\frac{\frac{p \vee q, p \vdash p}{p \vee q, p \vdash q \vee p} \text{ax}}{\vee_i} \quad \frac{\frac{\frac{p \vee q, q \vdash q}{p \vee q, q \vdash q \vee p} \text{ax}}{\vee_i}}{\vee_e}}{p \vee q \vdash q \vee p}$$

A6. $q \vdash p \rightarrow q$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{q, p \vdash q}{q \vdash p \rightarrow q} \text{ax}}{\rightarrow_i}}$$

A7. $p \wedge q \vdash p \rightarrow q$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{p \wedge q, p \vdash p \wedge q}{p \wedge q, p \vdash q} \text{ax}}{\wedge_e}}{\rightarrow_i}}{p \wedge q \vdash p \rightarrow q}$$

A8. $p, q \wedge r \vdash p \wedge q$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{p, q \wedge r \vdash p}{p, q \wedge r \vdash p} \text{ax} \quad \frac{\frac{\frac{p, q \wedge r \vdash q \wedge r}{p, q \wedge r \vdash q} \text{ax}}{\wedge_e}}{\wedge_i}}{p, q \wedge r \vdash p \wedge q}$$

A9. $p \wedge q, r \wedge s \vdash p \wedge s$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{p \wedge q, r \wedge s \vdash p \wedge q}{p \wedge q, r \wedge s \vdash p} \text{ax}}{\wedge_e} \quad \frac{\frac{\frac{p \wedge q, r \wedge s \vdash r \wedge s}{p \wedge q, r \wedge s \vdash s} \text{ax}}{\wedge_e}}{\wedge_i}}{p \wedge q, r \wedge s \vdash p \wedge s}$$

A10. $a \rightarrow \neg a \vdash \neg a$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{a \rightarrow \neg a, a \vdash a \rightarrow \neg a} \text{ax}}{a \rightarrow \neg a, a \vdash \neg a} \rightarrow_e}{a \rightarrow \neg a, a \vdash \perp} \neg_i}{a \rightarrow \neg a \vdash \neg a} \neg_e$$

B Preuves intermédiaires

Prouver les séquents suivants :

B1. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

Solution : On pose $\Gamma = p \rightarrow q, \neg q, p$.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash p} \text{ax}}{\Gamma \vdash q} \rightarrow_e}{\Gamma \vdash \perp} \neg_i}{p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p} \rightarrow_i}{p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p} \rightarrow_e$$

B2. $\neg a \vee b \vdash a \rightarrow b$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{\neg a \vee b, a \vdash \neg a \vee b} \text{ax}}{\neg a \vee b, a \vdash \neg a} \rightarrow_e}{\neg a \vee b, a \vdash \perp} \perp_e}{\neg a \vee b, a \vdash b} \rightarrow_i}{\neg a \vee b, a \vdash a \rightarrow b} \rightarrow_e}{\neg a \vee b \vdash a \rightarrow b} \rightarrow_e$$

B3. $a \rightarrow b \vdash \neg a \vee b$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{a \rightarrow b \vdash \neg a \vee a} \text{te}}{a \rightarrow b, \neg a \vdash \neg a} \vee_i}{a \rightarrow b, a \vdash \neg a \vee b} \vee_e}{a \rightarrow b \vdash \neg a \vee b} \rightarrow_e}{a \rightarrow b \vdash \neg a \vee b} \rightarrow_e$$

B4. $a \rightarrow (b \rightarrow c) \vdash (a \wedge b) \rightarrow c$

Solution :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{a \rightarrow (b \rightarrow c), a \wedge b \vdash a \wedge b} \text{ ax}}{a \rightarrow (b \rightarrow c), a \wedge b \vdash b} \wedge_e \quad \frac{\frac{\overline{a \rightarrow (b \rightarrow c), a \wedge b \vdash a \wedge b} \text{ ax}}{a \rightarrow (b \rightarrow c), a \wedge b \vdash a} \wedge_e \quad \frac{\overline{a \rightarrow (b \rightarrow c), a \wedge b \vdash a \rightarrow (b \rightarrow c)} \text{ ax}}{a \rightarrow (b \rightarrow c), a \wedge b \vdash b \rightarrow c} \rightarrow_e}{a \rightarrow (b \rightarrow c), a \wedge b \vdash c} \rightarrow_e}{a \rightarrow (b \rightarrow c) \vdash (a \wedge b) \rightarrow c} \rightarrow_i$$

B5. $(a \wedge b) \rightarrow c \vdash a \rightarrow (b \rightarrow c)$

Solution : On pose $\Gamma = (a \wedge b) \rightarrow c, a, b$.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash a} \text{ ax}}{\Gamma \vdash a \wedge b} \wedge_i \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash b} \text{ ax}}{\Gamma \vdash (a \wedge b) \rightarrow c} \text{ ax}}{(a \wedge b) \rightarrow c, a, b \vdash c} \rightarrow_e}{(a \wedge b) \rightarrow c, a \vdash b \rightarrow c} \rightarrow_i}{(a \wedge b) \rightarrow c \vdash a \rightarrow (b \rightarrow c)} \rightarrow_i$$

B6. $a \rightarrow (b \rightarrow c), b \rightarrow a \vdash b \rightarrow c$

Solution : On pose $\Gamma = a \rightarrow (b \rightarrow c), b \rightarrow a, b$.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash b} \text{ ax}}{\Gamma \vdash a} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash b \rightarrow a} \text{ ax}}{\Gamma \vdash a \rightarrow (b \rightarrow c)} \rightarrow_e}{\Gamma \vdash b \rightarrow c} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash b} \text{ ax}}{\Gamma \vdash b} \rightarrow_e}{\Gamma \vdash c} \rightarrow_i}{a \rightarrow (b \rightarrow c), b \rightarrow a \vdash b \rightarrow c} \rightarrow_i$$

B7. $p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash \neg p$

Solution : On pose $\Gamma = p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r$.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma, p \vdash p \rightarrow (q \vee r)} \text{ ax}}{\Gamma, p \vdash q \vee r} \text{ ax} \quad \frac{\overline{\Gamma, p \vdash p} \text{ ax}}{\Gamma, p, q \vdash q} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma, p, q \vdash q} \text{ ax}}{\Gamma, p, q \vdash \perp} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma, p, q \vdash \neg q} \text{ ax}}{\Gamma, p, r \vdash r} \rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma, p, r \vdash r} \text{ ax}}{\Gamma, p, r \vdash \perp} \rightarrow_e}{\Gamma, p \vdash \perp} \vee_e}{\Gamma, p \vdash \perp} \rightarrow_i}{p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash \neg p} \rightarrow_i$$

B8. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$

Solution : On pose $\Gamma = p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r$.

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, q \vdash p \text{ ax} \quad \frac{\Gamma, q \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r) \text{ ax}}{\Gamma, q \vdash q \rightarrow r} \rightarrow_e}{\Gamma, q \vdash q} \text{ ax} \quad \frac{\Gamma, q \vdash r}{\Gamma, q \vdash r} \neg_e}{\Gamma, q \vdash \perp} \neg_e}{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q} \neg_i$$

C Preuves plus complexes

Prouver les séquents suivants :

C1. $q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow r$

Solution : On pose $\Gamma = q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p, p$.

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash q \neg q \text{ te} \quad \frac{\Gamma, q \vdash q \rightarrow r \text{ ax} \quad \frac{\Gamma, q \vdash q} \rightarrow_e}{\Gamma, q \vdash r} \text{ ax}}{\Gamma \vdash r} \rightarrow_i \quad \frac{\frac{\frac{\Gamma, \neg q \vdash \neg q \rightarrow \neg p \text{ ax} \quad \frac{\Gamma, \neg q \vdash \neg q} \rightarrow_e}{\Gamma, \neg q \vdash \neg p} \text{ ax} \quad \frac{\Gamma, \neg q \vdash \perp}{\Gamma, \neg q \vdash r} \perp_e}{\Gamma, \neg q \vdash p} \neg_e}{q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow r} \rightarrow_i$$

C2. $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

Solution : On pose $\Gamma = (p \wedge q) \rightarrow r$ et $\psi = (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash p \neg p \text{ te} \quad \frac{\frac{\frac{\Gamma, p, q \vdash \Gamma \text{ ax} \quad \frac{\Gamma, p, q \vdash p \text{ ax} \quad \frac{\Gamma, p, q \vdash q} \wedge_i}{\Gamma, p, q \vdash p \wedge q} \text{ ax}}{\Gamma, p, q \vdash r} \rightarrow_i \quad \frac{\Gamma, p \vdash q \rightarrow r}{\Gamma, p \vdash \psi} \vee_i}{\Gamma, p \vdash \psi} \vee_i}{\Gamma \vdash \psi} \vee_e \quad \frac{\frac{\frac{\Gamma, \neg p, p \vdash p \text{ ax} \quad \frac{\Gamma, \neg p, p \vdash \neg p} \neg_e}{\Gamma, \neg p, p \vdash \perp} \perp_e}{\Gamma, \neg p, p \vdash r} \rightarrow_i \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash p \rightarrow r}{\Gamma, \neg p \vdash \psi} \vee_i}{\Gamma, \neg p \vdash \psi} \vee_e}{\Gamma \vdash \psi} \vee_e$$

C3. $\neg(a \vee b) \vdash \neg a \wedge \neg b$ (Loi de De Morgan)

Solution :

$$\frac{\frac{\neg(a \vee b) \vdash \neg a \text{ à prouver} \quad \frac{\neg(a \vee b) \vdash \neg b \text{ à prouver}}{\neg(a \vee b) \vdash \neg a \wedge \neg b} \wedge_i}{\neg(a \vee b) \vdash \neg a \wedge \neg b} \wedge_i$$

On a divisé l'objectif en deux sous-objectifs et les preuves seront identiques pour les deux.

$$\frac{\frac{\overline{\neg(a \vee b) \vdash \neg a \vee a} \text{ te} \quad \overline{\neg(a \vee b), \neg a \vdash \neg a} \text{ ax} \quad \overline{\neg(a \vee b), a \vdash \neg a} \text{ à prouver}}{\neg(a \vee b) \vdash \neg a} \vee_e$$

On cherche maintenant à prouver $\neg(a \vee b), a \vdash \neg a$.

$$\frac{\frac{\overline{\neg(a \vee b), a \vdash \neg(a \vee b)} \text{ ax} \quad \frac{\overline{\neg(a \vee b), a \vdash a} \text{ ax}}{\neg(a \vee b), a \vdash a \vee b} \vee_i}{\neg(a \vee b), a \vdash \perp} \neg_e}{\neg(a \vee b), a \vdash \neg a} \perp_e$$

On procède de même pour $\neg(a \vee b) \vdash \neg b$. L'utilisation du tiers-exclu fait de cette preuve un exemple de logique classique. On peut procéder sans et en faire ainsi un exemple de preuve en logique intuitionniste.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\neg(a \vee b), a \vdash \neg(a \vee b)} \text{ ax} \quad \frac{\overline{\neg(a \vee b), a \vdash a} \text{ ax}}{\neg(a \vee b), a \vdash a \vee b} \vee_i}{\neg(a \vee b), a \vdash \perp} \neg_i}{\neg(a \vee b) \vdash \neg a} \neg_i \quad \frac{\frac{\overline{\neg(a \vee b), b \vdash \neg(a \vee b)} \text{ ax} \quad \frac{\overline{\neg(a \vee b), b \vdash b} \text{ ax}}{\neg(a \vee b), b \vdash a \vee b} \vee_i}{\neg(a \vee b), b \vdash \perp} \neg_i}{\neg(a \vee b) \vdash \neg b} \neg_i}{\neg(a \vee b) \vdash \neg a \wedge \neg b} \wedge_i$$